Théorème de Fejér

El Amrani, p. 190

Théorème : 1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\sigma_N(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [1,+\infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_N(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$.

Notations : $D_j = \sum_{k=-j}^{j} e_k$, $K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \geq 0$ et $\sigma_N(f) = f * K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} S_j(f)$.

1) On a $\|\sigma_N(f)\|_\infty = \|f * K_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty \underbrace{\|K_N\|_1}_{=1} = \|f\|_\infty$ donc $\sigma_N(f) \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

Puisque $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, f est uniformément continue. Ainsi, pour $\varepsilon > 0$, $\exists \delta \in]0,\pi]$ tel que :

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Alors :
$$\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_N(f)(x)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) \underbrace{K_N(t)}_{\geq 0} dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} |f(x) - f(x-t)| K_N(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} |f(x)-f(x-t)| K_N(t)\,dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} K_N(t)\,dt + \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\delta<|t|\leq\pi} K_N(t)\,dt.
\end{aligned}$$

D'une part, $0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} K_N(t)\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = 1$.

D'autre part, $\forall \delta < |t| \leq \pi$, $\sin^2(t/2) \underset{\text{par croissance de sin sur } [0,\pi/2]}{\geq} \sin^2(\delta/2)$ d'où $K_N(t) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \leq \frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}$.

$\Longrightarrow |f(x) - \sigma_N(f)(x)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin^2(\delta/2)} \leq 2\varepsilon$ pour N assez grand.

2) Puisque $K_N \geq 0$ et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = 1$, $\frac{K_N}{2\pi}$ est une mesure de probabilité sur $[-\pi,\pi]$.

D'où $|\sigma_N(f)(x)|^p = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t)\,dt\right|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_N(t)\,dt$ par l'inégalité de Jensen

↳ car $t \mapsto |t|^p$ est convexe $\forall p \geq 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|\sigma_N(f)\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N(f)(x)|^p\,dx &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_N(t)\,dt\,dx \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p\,dx}_{=2\pi\|f\|_p^p}\,dt \\
&= \underbrace{\|K_N\|_1}_{=1} \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

D'où $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_N(f) \in L^p_{2\pi}$.

Soit $x \in [-\pi,\pi]$. On a : $f(x) - \sigma_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_N(t)\,dt$

Posons $g(t) = \|f - \tau_t f\|_p^p$ où $\tau_t f(x) = f(x+t)$. Alors $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ par continuité des translations et de la norme.

Alors :
$$\begin{aligned}
\|f - \sigma_N(f)\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|^p\,dx}_{=2\pi g(-t)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) g(-t)\,dt \\
&= (K_N * g)(0) \\
&= \sigma_N(g)(0) \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} g(0) = 0 \text{ d'après le cas 1).}
\end{aligned}$$